BULLETIN BRAZILIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Bull Braz Math Soc, New Series 33(1), 99-123

Flot horosphérique des repères sur les variétés hyperboliques de dimension 3 et spectre des groupes kleiniens

Damien Ferte

Résumé. Soit Γ un groupe kleinien. L'action sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ du sous-groupe unipotent supérieur est conjuguée à un flot à deux paramètres sur le fibré des repères orthonormés directs de la variété hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. Nous montrons que la topologie des orbites (compacité, divergence, densité dans l'ensemble non errant) est analogue à la topologie du feuilletage horosphérique sur le fibré tangent unitaire des variétés hyperboliques. Nous établissons pour cela un résultat de "non arithméticité" du spectre des groupes kleiniens.

Mots-clés: horosphère, groupe kleinien, ensemble limite, longueur de translation, action linéaire.

Abstract. Let Γ be a Kleinian group. The action of the upper unipotent subgroup by right multiplication on $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ is conjugated to a two-dimensional flow on the frame bundle of the hyperbolic manifold $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. We show that the topology of orbits (compactness, divergence, density) is analogous to the topology of the horospherical foliation on hyperbolic manifolds. In order to study dense orbits, we prove a result of "non-arithmeticity" of the spectrum of Kleinian groups.

Keywords: horosphere, Kleinian group, limit set, length of translation, linear action.

Mathematical subject classification: 37D40, 20H10, 30F40.

0 Introduction

Le flot horocyclique sur le fibré unitaire des surfaces hyperboliques est conjugué à l'action du sous-groupe unipotent supérieur sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ où Γ est un

Received 8 January 2002.

groupe fuchsien. Si Γ est de type fini, la topologie des orbites est connue: elles sont, en restriction à l'ensemble non errant, compactes ou denses. Signalons que cette propriété caractérise la finitude du type de Γ ([S]). Dans ce texte, nous nous intéressons aux sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. L'action du sous-groupe unipotent supérieur de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ correspond dans ce cas à un flot à deux paramètres sur le fibré des repères orthonormés directs des variétés hyperboliques de dimension 3; notre but est d'en étudier la topologie.

Nous considérons ici l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3 = \{(z,t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$. Le bord géométrique de cet espace est la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Notons $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ le fibré des repères orthonormés directs (une orientation étant fixée) de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Le groupe des isométries orientées de $\mathbb{H}^3$ et l'espace $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ s'identifient au groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Chaque vecteur tangent u définit une unique géodésique orientée dont les extrémités seront notées $u(+\infty)$ et $u(-\infty)$. Nous dirons qu'un repère $\underline{u} = (u_0, u_1, u_2)$ de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ est *dirigé* vers le point à l'infini $u_0(+\infty)$. Nous définissons un flot à deux paramètres $(h^z)_{z\in\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ appelé *flot horosphérique des repères* (voir 1.1). Dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, ce flot est représenté par l'action du sous-groupe unipotent supérieur

$$\mathrm{N} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

par multiplication à droite.

Si Γ est un groupe kleinien, c'est-à-dire un groupe d'isométries orientées agissant proprement discontinûment et librement sur $\mathbb{H}^3$, l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ est muni d'une structure naturelle de variété localement isométrique à $\mathbb{H}^3$. Le fibré $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ s'identifie à l'ensemble des classes à droite de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ par le groupe Γ. Nous étudions la topologie des orbites du flot $(h^z)_z$ sur l'espace homogène $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et de façon "duale" la topologie des orbites linéaires du groupe Γ.

Si x est un point quelconque de $\mathbb{H}^3$, l'orbite Γx est discrète dans $\mathbb{H}^3$ et s'accumule sur $\hat{\mathbb{C}}$ en $\overline{\Gamma x} \cap \hat{\mathbb{C}}$. Cet ensemble, noté L_Γ, qui est indépendant du choix du point x, est appelé l'*ensemble limite* de Γ. Un point ξ de l'ensemble limite est dit *parabolique* s'il est fixé par une isométrie parabolique du groupe Γ (le *rang* de ξ est alors par définition le rang du sous-groupe abélien Γ_ξ, le stabilisateur du point ξ dans le groupe Γ). Un point parabolique ξ est dit *parabolique borné* s'il est de rang 2 ou s'il existe deux disques ouverts disjoints de $\hat{\mathbb{C}}$ tels que la réunion $\mathbf{U}$ de ces deux disques soit *précisément* Γ_ξ*-invariante* (i.e $\mathbf{U}$ est invariant par Γ_ξ et $\gamma(\mathbf{U}) \cap \mathbf{U} = \emptyset$ pour toute isométrie γ de $\Gamma - \Gamma_\xi$). Une définition équivalente consiste à dire que le point ξ est parabolique borné si son stabilisateur Γ_ξ agit de façon cocompacte sur $L_\Gamma - \{\xi\}$ ([Bow]). Il est dit *horosphérique* si toute horoboule centrée en ξ contient un point de l'orbite Γx. Signalons qu'un point de l'ensemble limite ne peut être à la fois parabolique et horosphérique, ce qui n'est plus le cas pour les espaces hyperboliques de dimension au moins 4 ([W]). Il est dit *conique* s'il est la limite d'une suite de Γx restant à distance bornée d'un rayon géodésique d'extrémité ξ. Un point conique est donc horosphérique.

Le sous-ensemble $\mathcal{R}_\Gamma$ de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ constitué de tous les repères dirigés vers un point de L_Γ est invariant par l'action du groupe Γ et du flot $(h^z)_z$, nous notons Ω_Γ sa projection dans $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$. L'application surjective

$$F \;:\; \Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3 \longrightarrow \Gamma\backslash\mathcal{T}^1\mathbb{H}^3 \;:\; \Gamma\underline{u} = \Gamma(u_0, u_1, u_2) \longmapsto \Gamma u_0$$

envoie l'espace des orbites du flot $(h^z)_z$ sur le feuilletage horosphérique ($\mathcal{T}^1\mathbb{H}^3$ désigne le fibré tangent unitaire de $\mathbb{H}^3$). Les résultats connus sur la topologie de ce feuilletage horosphérique sont les suivants ([D2], [S]):

– Si le point $u_0(+\infty)$ n'appartient pas à L_Γ ou s'il est parabolique borné, la feuille contenant le vecteur unitaire u_0 est fermée.

– La feuille contenant u_0 est dense dans le sous-ensemble $F(\Omega_\Gamma)$ de $\Gamma\backslash\mathcal{T}^1\mathbb{H}^3$ si et seulement si $u_0(+\infty)$ est un point horosphérique.

Les théorèmes A et B établissent le même type de comportement pour les orbites du flot $(h^z)_z$: le théorème A montre que toute la dynamique du flot $(h^z)_z$ est concentrée dans l'ensemble non errant Ω_Γ et décrit certaines orbites fermées et le théorème B caractérise les repères de $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ dont l'orbite par le flot $(h^z)_z$ est dense dans Ω_Γ.

Théorème A. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire. Soit $\underline{u}$ un élément de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ dirigé vers le point à l'infini ξ.*

(i) Si le point ξ n'appartient pas à L_Γ, l'orbite de $\underline{u}$ dans $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ par le flot horosphérique est fermée. C'est l'image du plongement d'un plan.

(ii) Si le point ξ est parabolique borné de rang 1, l'orbite de $\underline{u}$ est fermée et non compacte. C'est l'image du plongement d'un cylindre.

(iii) L'orbite de $\underline{u}$ dans $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ est compacte (c'est l'image du plongement d'un tore) si et seulement si le point ξ est un point parabolique de rang 2.

Les homographies de la droite projective complexe qui préservent la droite projective réelle sont les homographies à coefficients réels. L'ensemble de ces homographies s'identifie au sous-groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Théorème B. *Soit* Γ *un groupe kleinien non élémentaire qui n'est pas conjugué dans* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. *L'orbite d'un repère par le flot horosphérique est dense dans* Ω_Γ *si et seulement si ce repère est dirigé vers un point horosphérique.*

Un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{H}^3$ est *géométriquement fini* si il existe dans $\mathbb{H}^3$ un domaine fondamental, pour l'action de ce groupe, qui soit convexe et délimité par un nombre fini de faces. A. Beardon et B. Maskit ont caractérisé les groupes géométriquement finis à l'aide de leur ensemble limite: un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{H}^3$ est géométriquement fini si et seulement si les points de son ensemble limite sont paraboliques bornés ou coniques ([BM],[M]). D'autre part, F. Dal'Bo a affaibli cette condition: la finitude géométrique est équivalente au fait que les points de l'ensemble limite sont paraboliques bornés ou horosphériques ([D2]). Parmi les groupes géométriquement finis nous pouvons distinguer certaines classes:

– Un groupe kleinien est un réseau (le volume de la variété $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ est fini) si et seulement si il est géométriquement fini et l'ensemble limite L_Γ est égal au bord $\hat{\mathbb{C}}$.

– Il est convexe-cocompact (l'ensemble non errant pour le flot géodésique et le flot géodésique inverse est compact) si et seulement si tous les points de l'ensemble limite sont horosphériques.

– Enfin, il est cocompact (la variété $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ est compacte) si et seulement si tous les points du bord sont horosphériques.

Nous obtenons donc, en combinant ces caractérisations et les théorèmes A et B, le corollaire suivant:

Corollaire C. *(i) Si un groupe kleinien non élémentaire* Γ *est géométriquement fini et n'est pas conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, *les orbites du flot horosphérique sur* $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ *sont fermées ou denses dans* Ω_Γ.

(ii) Un groupe kleinien Γ *est un réseau si et seulement si les orbites du flot horosphérique sur* $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ *sont denses ou compactes.*

(iii) Un groupe kleinien Γ *est convexe-cocompact et n'est pas conjugué à un sous groupe de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ *si et seulement si toutes les orbites du flot horosphérique sur* $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ *sont denses dans* Ω_Γ.

(iv) Un groupe kleinien Γ *est cocompact si et seulement si toutes les orbites du flot horosphérique sur* $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ *sont denses.*

Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ agit naturellement sur le quotient $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ par $\{\pm\mathrm{Id}\}$. Dans la suite, le terme "vecteur" désignera sans distinction un élément de $\mathcal{V}$ ou un de ses représentants dans $\mathbb{C}^2$. Pour un groupe kleinien Γ notons $\mathcal{V}_\Gamma$ le cône complexe de $\mathcal{V}$ constitué des vecteurs dont la direction appartient à L_Γ. Nous obtenons alors des énoncés équivalents aux deux théorèmes précédents. Le Théorème B' généralise le théorème 2 de L. Greenberg ([G]) pour les sous-groupes discrets du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (voir également [CG] pour un énoncé dans le cas de sous-groupes de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $n \geq 2$).

Théorème A'. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire et v un vecteur de $\mathcal{V}$ dirigé vers le point ξ. Si ξ n'appartient pas à L_Γ ou si ξ est un point parabolique borné alors l'orbite de v est discrète dans $\mathcal{V} \cup \{0\}$.*

Théorème B'. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire qui n'est pas conjugué dans* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$. *L'orbite par le groupe* Γ *d'un vecteur de $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathcal{V}_\Gamma$ si et seulement si l'origine* 0 *est adhérente à cette orbite.*

Pour établir le théorème B (ou B'), nous utilisons une *longueur complexe de translation* et nous démontrons un résultat de "non arithméticité" du spectre de ces longueurs (proposition D). C'est à ce moment qu'intervient l'hypothèse que le groupe Γ n'est pas conjugué à un groupe de matrices réelles.

Définissons le *flot géodésique des repères* $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ par le transport parallèle le long de la géodésique orientée définie par le premier vecteur du repère. Considérons une isométrie hyperbolique γ de $\mathbb{H}^3$ de point fixe répulsif (resp. attractif) γ^- (resp. γ^+). Cette isométrie agit par translation sur la géodésique joignant γ^- à γ^+, notons $l(\gamma)$ la distance de translation ($l(\gamma) > 0$). Soit $\underline{u} = (u_0, u_1, u_2)$ un repère de l'espace tangent basé en un point x de l'axe (γ^-, γ^+) et dirigé vers γ^+. L'application $g^{-l(\gamma)} \circ \gamma$ agit sur $\mathcal{T}_x\mathbb{H}^3$ par isométrie et fixe u_0 donc agit par rotation sur le sous-espace orthogonal à u_0. Plus généralement, le groupe $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des repères orthonormés dont le premier vecteur est u_0 de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot (u_0, u_1, u_2) = (u_0, \cos\theta u_1 + \sin\theta u_2, -\sin\theta u_1 + \cos\theta u_2).$$

On associe à γ l'angle de rotation $\theta(\gamma)$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ou le nombre complexe $e^{i\theta(\gamma)}$. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ étant abélien, l'angle $\theta(\gamma)$ est indépendant des vecteurs u_1 et u_2. Il est aussi indépendant du choix du point de base sur l'axe (γ^-, γ^+).

Définition. La quantité $l_{\mathbb{C}}(\gamma) = l(\gamma) + i\theta(\gamma)$ (appartenant à $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$) est la *longueur complexe de translation* de l'isométrie hyperbolique γ.

Proposition D. *Soient* Γ *un groupe kleinien non élémentaire et* S_Γ *l'adhérence du sous-groupe de* $\mathbb{C}^*$ *engendré par l'ensemble* $\{e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)}\}$ *où* γ *parcourt l'ensemble des isométries hyperboliques du groupe* Γ. *Alors le groupe* S_Γ *est égal à* $\mathbb{C}^*$ *sauf si* Γ *est conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. *Et dans ce cas, le groupe* S_Γ *est égal à* $\mathbb{R}_+^*$ *si* Γ *est conjugué à un groupe fuchsien et égal à* $\mathbb{R}^*$ *sinon.*

En particulier, nous retrouvons dans le cas des dimensions 2 et 3 le résultat suivant (voir [D1]) : le spectre des longueurs d'un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{H}^n$ discret et non élémentaire n'engendre pas un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

Une autre conséquence est la minimalité de l'action du groupe Γ sur l'ensemble non errant des rayons réels de $\mathcal{V}$ (comparable au lemme 6 dans [G], voir aussi la proposition 2.4 dans [CG]). L'espace des directions réelles de $\mathcal{V}$ s'identifie au quotient de la sphère unité S^3 de $\mathbb{C}^2$ par l'application antipodale. Notons π la projection canonique

$$\pi \ : \ S^3/\{\pm\mathrm{Id}\} \cong \mathcal{V}/\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}}.$$

Corollaire E. *Soit* Γ *un groupe kleinien non élémentaire et non conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. *Alors l'ensemble* $\pi^{-1}(L_\Gamma)$ *est minimal parmi les sous-ensembles non vides de* $S^3/\{\pm\mathrm{Id}\}$, *fermés et invariants par* Γ.

Je tiens à remercier Françoise Dal'Bo pour ses conseils et encouragements.

1 Préliminaires

1.1 Flot horosphérique des repères

Si x et y sont deux points de $\mathbb{H}^3$, si ξ est un point du bord et $(r_t)_{t\geq 0}$ un rayon géodésique d'extrémité ξ, alors la quantité

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{t\to+\infty} d(x, r_t) - d(y, r_t)$$

existe et est indépendante du rayon $(r_t)_{t\geq 0}$ choisi. La fonction β_ξ est la *fonction de Busemann* au point ξ (voir [Bou]). Elle vérifie :

– $\beta_\xi(x, y) = \beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z)$ pour tous points x, y, z de $\mathbb{H}^3$ et

– $\beta_{\gamma(\xi)}(\gamma(x), \gamma(y)) = \beta_\xi(x, y)$ pour tous points x, y de $\mathbb{H}^3$ et toute isométrie γ.

Les lignes de niveau de la fonction $\beta_\xi(x, .)$ sont les *horosphères* (centrées en ξ). L'horosphère correspondant à la valeur 0 sera notée $H_\xi(x)$.

Soit un repère $\underline{u} = (u_0, u_1, u_2)$ basé en un point x de $\mathbb{H}^3$. La courbure de l'espace $\mathbb{H}^3$ est constante donc l'application exponentielle définit une isométrie globale, pour la métrique riemannienne induite, entre le sous-espace de $\mathcal{T}_x\mathbb{H}^3$ orthogonal à u_0 et l'horosphère $H_\xi(x)$ centrée en $\xi = u_0(+\infty)$ et passant par x. Pour tout $z = t_1 + it_2 \in \mathbb{C}$, l'application

$$\phi \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow H_\xi(x) \;:\; s \longmapsto \exp(s(t_1u_1 + t_2u_2))$$

est une géodésique de $H_\xi(x)$ (pour la métrique induite) paramétrée par longueur d'arc. Le vecteur unitaire u_0' basé en $\phi(1)$ et dirigé vers ξ et les vecteurs u_1', u_2' obtenus par transport parallèle des vecteurs u_1 et u_2 respectivement le long de la courbe ϕ entre 0 et 1 forment dans cet ordre un repère orthonormé direct de $\mathcal{T}_{\phi(1)}\mathbb{H}^3$. Cette action de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ définit le *flot horosphérique* $(h^z)_{z\in\mathbb{C}}$ sur l'espace des repères. Ce flot, de même que le flot géodésique des repères, est défini par des notions métriques. Par conséquent, ces deux flots commutent avec l'action des isométries orientées de l'espace hyperbolique.

1.2 Isométries de l'espace hyperbolique et groupes kleiniens

L'ensemble des isométries orientées non triviales de $\mathbb{H}^3$ se décompose en trois sous-ensembles (invariants par conjugaison) : une isométrie est *elliptique* si elle fixe (au moins) un point de $\mathbb{H}^3$. Dans le cas contraire, elle est *parabolique* si elle fixe un unique point de $\hat{\mathbb{C}}$ et *hyperbolique* si elle fixe deux points de $\hat{\mathbb{C}}$. Une isométrie parabolique fixant un point ξ de $\hat{\mathbb{C}}$ préserve globalement chaque horosphère centrée en ξ. Si γ est une isométrie hyperbolique, son point fixe attractif (resp. répulsif) γ^+ (resp. γ^-) est le point vérifiant:

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma^n(x) = \gamma^+ \text{ (resp. } \lim_{n\to-\infty} \gamma^n(x) = \gamma^-) \text{ pour tout } x \in \mathbb{H}^3.$$

La notation Γ_{hyp} désignera l'ensemble des isométries hyperboliques du groupe Γ.

Nous rappelons une définition du birapport sur la sphère de Riemann. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit (par homographies) simplement transitivement sur les triplets de points de $\hat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts. Si a, b, c, d sont quatre points de $\hat{\mathbb{C}}$, a, b, c étant deux à deux distincts, le birapport $[a, b, c, d]$ est la valeur $h(d)$ où h est l'unique homographie envoyant le triplet (a, b, c) sur le triplet $(0, \infty, 1)$:

$$[a, b, c, d] = \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

Le birapport est invariant par homographie. Le lemme suivant exprime la longueur complexe de translation d'une isométrie hyperbolique à l'aide d'un birapport. (On retrouve une égalité de J.-P. Otal et I. Kim vraie dans un cadre plus général mais à termes réels. [O], [K]).

Lemme 1.1. *Soient γ une isométrie hyperbolique de points fixes γ^- et γ^+ et ξ un point de $\hat{\mathbb{C}} - \{\gamma^\pm\}$, alors:*

$$[\gamma^-, \gamma^+, \xi, \gamma(\xi)] = e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)}.$$

Démonstration. Considérons, pour un nombre complexe λ vérifiant $|\lambda| > 1$, l'isométrie hyperbolique h représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Les points fixes de l'isométrie h sont $h^- = 0$ et $h^+ = \infty$ et la longueur de translation $l_{\mathbb{C}}(h)$ est égale à $\ln|\lambda^2| + i \arg(\lambda^2)$. Pour tout point ξ de $\hat{\mathbb{C}}$ différent de 0 et ∞:

$$[h^-, h^+, \xi, h(\xi)] = [0, \infty, \xi, \lambda^2\xi] = \lambda^2 = e^{l_{\mathbb{C}}(h)}.$$

Le lemme est donc vrai pour h. Toute isométrie hyperbolique est conjuguée à une isométrie de cette forme et les deux termes de l'égalité sont des invariants de conjugaison donc le lemme est vrai pour toute isométrie hyperbolique. $\square$

La proposition suivante regroupe les propriétés de l'ensemble limite d'un groupe kleinien qui seront utilisées par la suite.

Proposition 1.2. *(voir [B], [M]) Soit Γ un groupe kleinien.*

(i) L'ensemble limite L_Γ contient tous les points de $\hat{\mathbb{C}}$ fixés par un élément de Γ.

(ii) L'ensemble limite L_Γ contient au plus deux points ou une infinité non dénombrable de points. Le groupe Γ est dit élémentaire si L_Γ est fini.

(iii) Si le groupe Γ n'est pas élémentaire, l'ensemble L_Γ est l'unique sous-ensemble de $\hat{\mathbb{C}}$ non vide, fermé, Γ-invariant et minimal pour ces trois propriétés.

(iv) Si le groupe Γ n'est pas élémentaire, l'ensemble des couples (γ^-, γ^+) où γ parcourt Γ_{hyp} est dense dans l'ensemble $\{(\xi, \xi') \in L_\Gamma : \xi \neq \xi'\}$.

1.3 Modèle algébrique et action linéaire

Le groupe des isométries orientées agit simplement transitivement sur le fibré $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$: l'application qui associe au repère $\underline{u} = (u_0, u_1, u_2)$ le triplet de points

$$(u_0(-\infty), u_0(+\infty), u_1(+\infty))$$

est une bijection de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ sur l'ensemble des triplets de points deux à deux distincts de $\hat{\mathbb{C}}$, ensemble sur lequel le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit simplement transitivement. En choisissant comme repère d'origine le repère $\mathcal{R}_0$ correspondant au triplet $(0, \infty, 1)$ (ce repère est basé au point $o = (0, 1)$ de $\mathbb{H}^3$), nous pouvons identifier $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ avec $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$. Le repère correspondant à l'homographie γ est dirigé vers le point $\gamma(\infty)$. Soit z un nombre complexe, l'image du repère $\mathcal{R}_0$ par l'application h^z est le repère correspondant au triplet $(z, \infty, z + 1)$. Ce triplet est l'image du triplet $(0, \infty, 1)$ par l'homographie $\xi \mapsto \xi + z$. L'action du groupe d'isométries $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ est transitive et commute avec le flot $(h^z)_z$ donc l'action du flot $(h^z)_{z\in\mathbb{C}}$ est représentée par la multiplication à droite par le sous-groupe unipotent supérieur N.

Le sous-groupe N est le stabilisateur du vecteur $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ pour l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\{\pm\mathrm{Id}\}$ donc l'espace des orbites du flot $(h^z)_z$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ s'identifie à $\mathcal{V}$ par l'application:

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{N} \longrightarrow \mathcal{V} \ : \ \gamma\mathrm{N} \longmapsto \pm\gamma e_1.$$

Il y a donc correspondance entre les orbites du flot horosphérique sur $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ et les orbites pour l'action linéaire de Γ dans $\mathcal{V}$.

Dans la suite on identifiera souvent $\mathcal{V}$ avec le produit $\hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*/\{\pm\mathrm{Id}\}$: chaque vecteur $v = \pm\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{V}$ définit un unique couple (ξ, α^2) où $\xi = \dfrac{z_1}{z_2}$ appartient à $\hat{\mathbb{C}}$ ($\xi = \infty$ si $z_2 = 0$) et $\alpha^2 = z_2^2$ si $z_2 \neq 0$ ($\alpha^2 = z_1^2$ si $z_2 = 0$). Si $||.||$ désigne la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^2$, on a $||v||^2 \geq |\alpha^2|$.

L'image $\mathcal{V}_\Gamma$ de $\mathcal{R}_\Gamma$ (l'ensemble des repères dirigés vers un point de L_Γ) dans $\mathcal{V}$ est constituée des vecteurs dont la projection canonique dans $\hat{\mathbb{C}}$ appartient à L_Γ. Cet ensemble est invariant par l'action linéaire de Γ et l'action de $\mathbb{C}^*$ par multiplication.

Si γ est une isométrie de $\mathbb{H}^3$, le vecteur $v = \gamma e_1$ de $\mathcal{V}$ représente l'orbite par le flot $(h^z)_z$ du repère $\gamma(\mathcal{R}_0)$. Soit (ξ, α^2) le couple correspondant au vecteur v, la norme hermitienne du vecteur v s'exprime à l'aide du cocycle de Busemann (le point $o = (0, 1)$ est le point de base du repère $\mathcal{R}_0$):

Propriété 1.3.

$$||v||^2 = e^{\beta_\xi(o,\gamma(o))}$$

Démonstration. Comme $\xi = \gamma(\infty)$, on a:

$$\beta_\xi(o,\gamma(o)) = \beta_{\gamma(\infty)}(o,\gamma(o)) = \beta_\infty(\gamma^{-1}(o), o) = -\ln t$$

où $\gamma^{-1}(o) = (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$. Si γ est représenté par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a:

$$||v||^2 = |a|^2 + |c|^2 \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{|a|^2 + |c|^2}$$

d'après la formule qui décrit l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{H}^3$ ([B] p58). L'égalité est vérifiée. □

De cette propriété, on déduit qu'un repère de $\mathbb{H}^3$ est dirigé vers un point limite horosphérique si et seulement si son orbite par le flot $(h^z)_z$ (identifiée à un vecteur v de $\mathcal{V}$) vérifie:

$$0 \in \overline{\Gamma v}.$$

Ainsi les Théorèmes B et B' sont équivalents.

1.4 Nombre dérivé d'une isométrie

Une homographie h est holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}} - \{\infty, h^{-1}(\infty)\}$, la définition suivante étend la notion de nombre dérivé à toute la sphère de Riemann.

Définition. Soient γ une isométrie de $\mathbb{H}^3$ représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et ξ un point de $\hat{\mathbb{C}}$, le nombre dérivé de γ en ξ est le nombre complexe non nul $\gamma'(\xi)$ défini par:

$$\begin{aligned}
\gamma'(\xi) &= \frac{1}{(c\xi + d)^2} \quad \text{si} \quad \xi \notin \{\infty, \gamma^{-1}(\infty)\}, \\
\gamma'(\xi) &= \frac{1}{c^2} \quad \text{si} \quad \xi = \infty \neq \gamma^{-1}(\infty), \\
\gamma'(\xi) &= \frac{1}{(a\xi + b)^2} \quad \text{si} \quad \xi = \gamma^{-1}(\infty) \neq \infty, \\
\gamma'(\xi) &= \frac{1}{a^2} = d^2 \quad \text{si} \quad \xi = \infty = \gamma^{-1}(\infty).
\end{aligned}$$

Remarque 1.4. Avec cette définition, si γ^- et γ^+ sont les points fixes respectivement répulsif et attractif d'une isométrie hyperbolique γ:

$$\gamma'(\gamma^{\pm}) = e^{\mp l_{\mathbb{C}}(\gamma)}.$$

L'action du groupe d'isométries sur $\mathcal{V}$ s'exprime à l'aide de ce nombre dérivé:

Lemme 1.5. *Soient γ une isométrie et $(\xi, \alpha^2) \in \hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*/\{\pm \mathrm{Id}\}$ un vecteur de $\mathcal{V}$, alors:*

$$\gamma(\xi, \alpha^2) = \left(\gamma(\xi), \alpha^2 \gamma'(\xi)^{-1}\right).$$

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ représentant l'isométrie γ. On notera $\simeq$ l'identification entre $\mathcal{V}$ et $\hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*/\{\pm \mathrm{Id}\}$.
– Si $\xi \neq \infty$ et $\gamma(\xi) \neq \infty$:

$$\gamma(\xi, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} \alpha(a\xi + b) \\ \alpha(c\xi + d) \end{pmatrix} \simeq \left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \alpha^2 (c\xi + d)^2 \right) = \left(\gamma(\xi), \alpha^2 \gamma'(\xi)^{-1}\right).$$

– Si $\xi = \infty$ et $\gamma(\xi) \neq \infty$:

$$\gamma(\infty, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} a\alpha \\ c\alpha \end{pmatrix} \simeq \left(\frac{a}{c}, \alpha^2 c^2 \right) = \left(\gamma(\infty), \alpha^2 \gamma'(\infty)^{-1}\right).$$

– Si $\xi = \infty$ et $\gamma(\xi) = \infty$:

$$\gamma(\infty, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} a\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \left(\infty, \alpha^2 a^2 \right) = \left(\gamma(\infty), \alpha^2 \gamma'(\infty)^{-1}\right).$$

– Si $\xi \neq \infty$ et $\gamma(\xi) = \infty$:

$$\gamma(\xi, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} (a\xi + b)\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \simeq (\infty, \alpha^2 (a\xi + b)^2) = \left(\gamma(\xi), \alpha^2 \gamma'(\xi)^{-1}\right). \quad \square$$

Lemme 1.6. *Soient γ une isométrie hyperbolique et ξ, ξ' deux points de $\hat{\mathbb{C}}$ distincts des points ∞ et $\gamma^{-1}(\infty)$, on a l'égalité suivante (dans $\mathbb{C}$):*

$$(\gamma(\xi) - \gamma(\xi'))^2 = \gamma'(\xi)\gamma'(\xi')(\xi - \xi')^2.$$

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ représentant l'isométrie hyperbolique γ:

$$
\begin{aligned}
(\gamma(\xi) - \gamma(\xi'))^2 &= \left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d} - \frac{a\xi' + b}{c\xi' + d}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(a\xi + b)(c\xi' + d) - (a\xi' + b)(c\xi + d)}{(c\xi + d)(c\xi' + d)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\xi - \xi'}{(c\xi + d)(c\xi' + d)}\right)^2 = \gamma'(\xi)\gamma'(\xi')(\xi - \xi')^2. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Remarque. Le flot horosphérique des repères peut se définir sur des variétés de dimension n quelconque mais on ne peut associer à une transformation hyperbolique un angle de rotation que si n est égal à 2 ou 3 car le groupe $\mathrm{SO}(n-1, \mathbb{R})$ doit être abélien. Cependant, en représentant le groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ à l'aide de matrices 2×2, F. Ledrappier et M. Pollicott étudient l'ergodicité de ce flot sur des revêtements abéliens de variétés compactes ([LP]).Voir également [Br].

2 Orbites du flot horosphérique

Démonstration du Théorème A. Puisque le paramétrage $z \longmapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ du sous-groupe N de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est une immersion et l'action de Γ est libre et proprement discontinue, toutes les orbites du flot horosphérique $(h^z)_z$ sont des immersions du plan $\mathbb{C}$ dans $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$. Soit $\underline{u}$ un repère dirigé vers le point ξ. Si le stabilisateur Γ_ξ du point ξ est trivial ou parabolique, il agit sur $h^{\mathbb{C}}(\underline{u})$ et l'application

$$
\Gamma_\xi\backslash h^{\mathbb{C}}(\underline{u}) \longrightarrow \Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3 \ : \ \Gamma_\xi \underline{v} \longmapsto \Gamma\underline{v} \tag{$*$}
$$

est injective et son image est l'orbite H du repère $\underline{u}$ dans $\Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3$. On en déduit que l'orbite H est difféomorphe à l'espace $\Gamma_\xi\backslash h^{\mathbb{C}}(\underline{u})$ donc à l'espace $\Gamma_\xi\backslash\hat{\mathbb{C}} - \{\xi\}$ car l'application

$$
\mathrm{Vis}_- \ : \ h^{\mathbb{C}}(\underline{u}) \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} - \{\xi\} \ : \ \underline{v} = (v_0, v_1, v_2) \longmapsto v_0(-\infty)
$$

est un difféomorphisme Γ_ξ-équivariant ($\gamma \mathrm{Vis}_-(\underline{v}) = \mathrm{Vis}_-(\gamma\underline{v})$ pour tout γ dans Γ_ξ).

Il suffit donc de démontrer que, dans le cas où ξ est un point parabolique borné ou n'appartenant pas à l'ensemble limite, l'application $(*)$ est propre (ce qui est évident si le point ξ est un point parabolique de rang 2). Notons p la projection canonique de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ sur $\mathbb{H}^3$ et $d(.,.)$ la distance hyperbolique sur $\mathbb{H}^3$. En conjuguant le groupe Γ, nous supposerons que ξ est le point ∞ et, s'il est parabolique, que l'application $\tau : z \mapsto z+1$ est primitive dans Γ_∞ (ce n'est pas la puissance d'une autre application de Γ_∞). Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que la suite $(h^{z_n}(\underline{u}))_n$ soit une suite de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ convergente modulo Γ, il faut montrer que cette suite possède une sous-suite convergente modulo Γ_∞. Si la suite $(z_n)_n$ possède une sous-suite bornée, c'est évident. Nous pouvons donc supposer que ce n'est pas le cas, en particulier la suite de points $(p(h^{z_n}\underline{u}))_n$ tend vers le point ∞. Il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ telle que la suite $(\gamma_n h^{z_n}(\underline{u}))_n$ converge dans $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ vers un repère $\underline{v}$. Notons $y = p(\underline{v})$ le point de base du repère $\underline{v}$. La distance

$$d(p(h^{z_n}\underline{u}), \gamma_n^{-1}y) = d(\gamma_n p(h^{z_n}\underline{u}), y)$$

tend vers 0, donc la suite $(\gamma_n^{-1}y)_n$ converge aussi vers ∞ ce qui est impossible si ce point n'appartient pas à L_Γ. Supposons maintenant que ∞ soit un point parabolique borné. Soit $\mathbf{D}$ un domaine fondamental de $\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$ pour l'action de Γ_∞. Si le point ∞ est de rang 1, le domaine $\mathbf{D}$ est égal à $\{z : 0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1\}$; si le rang est 2, le domaine $\mathbf{D}$ est compact. Le cône $C(\mathbf{D})$ de base $\mathbf{D}$ et de sommet ∞ (fig. 1) est un domaine fondamental de $\mathbb{H}^3$ pour l'action de Γ_∞. Pour tout n, il existe donc une isométrie τ_n de Γ_∞ telle que le point $\tau_n p(h^{z_n}\underline{u})$ appartienne à $C(\mathbf{D})$. Ce point appartient également à l'horosphère centrée au point ∞ et passant par $p(\underline{u})$.

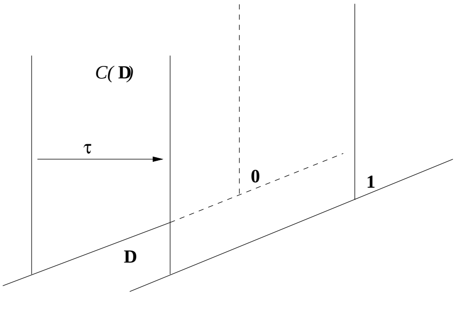


Fig. 1

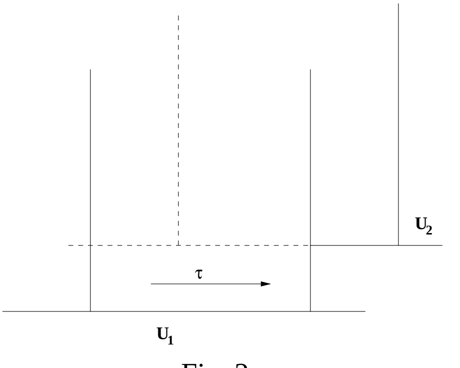


Fig. 2

Si la suite $(\tau_n p(h^{z_n}\underline{u}))_n$ possède une sous-suite convergente, c'est également le cas de la suite $(\tau_n h^{z_n}\underline{u})_n$ donc la suite $(h^{z_n}\underline{u})_n$ possède une sous-suite convergente modulo Γ_∞. Si la suite $(\tau_n p(h^{z_n}\underline{u}))_n$ n'est pas bornée, le point parabolique ∞ est de rang 1 et il existe deux disques ouverts de $\hat{\mathbb{C}}$ dont la réunion $\mathbf{U}$ est précisément Γ_∞-invariante. Ces deux disques sont alors tangents au point ∞. Le cône $C(\mathbf{U})$ de base $\mathbf{U}$ (fig. 2) et de sommet ∞ est aussi précisément Γ_∞-invariant. Les points $\tau_n p(h^{z_n}\underline{u})$ tendent vers ∞ dans l'ouvert $C(\mathbf{U})$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} d(\tau_n p(h^{z_n}\underline{u}), \tau_n\gamma_n^{-1}y) = \lim_{n\to+\infty} d(\gamma_n p(h^{z_n}\underline{u}), y) = 0,$$

les points $\gamma_n^{-1}y$ appartiennent aussi à $C(\mathbf{U})$ à partir d'un certain rang n_0. De l'égalité

$$\gamma_{n+1}^{-1}\gamma_n(\gamma_n^{-1}y) = \gamma_{n+1}^{-1}y$$

et de la propriété de $C(\mathbf{U})$ d'être précisément Γ_∞-invariant, on déduit que γ_n appartient à $\gamma_{n_0}\Gamma_\infty$ pour tout n plus grand que n_0. La suite $(h^{z_n}\underline{u})_n$ est alors convergente modulo Γ_∞ (vers $\gamma_{n_0}^{-1}\underline{v}$).

Nous avons donc montré que l'application $(*)$ est un plongement d'un plan, d'un cylindre ou d'un tore selon que le point ξ n'est pas un point limite, est parabolique borné de rang 1 ou de rang 2. Il ne reste plus qu'à démontrer que l'orbite d'un repère est compacte seulement si ce repère est dirigé vers un point parabolique de rang 2. Si l'orbite H est compacte, l'application

$$\mathbb{C} \longrightarrow H \subseteq \Gamma\backslash\mathcal{R}\mathbb{H}^3 \ : \ z \longmapsto \Gamma h^z(\underline{u})$$

est une immersion surjective mais n'est pas un homéomorphisme. Elle n'est pas injective donc il existe γ dans Γ et deux nombres complexes distincts z et z' tels que $\gamma h^z(\underline{u}) = h^{z'}(\underline{u})$ ou encore $\gamma\underline{u} = h^{z'-z}(\underline{u})$. Donc γ est une isométrie parabolique fixant ∞. D'après ce qui précède, le stabilisateur Γ_∞ est de rang 2. $\square$

La fin de cette section est dévolue à la démonstration du Théorème B'.

Lemme 2.1. *Soient γ_1 et γ_2 deux isométries hyperboliques de points fixes respectifs $\gamma_i^\pm$ ($i = 1, 2$). On suppose que ces quatre points sont distincts deux à deux et distincts du point ∞. Soient $(r_n)_n$ une suite non bornée d'entiers positifs et $(s_n)_n$ une suite d'entiers relatifs telles que la suite de termes $r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_2)+s_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)$ converge vers 0. Soit $v = (\gamma_1^+, \alpha^2)$ un vecteur de $\mathcal{V}$ alors:*

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_2^{r_n}\gamma_1^{s_n}(v) = \left(\gamma_2^+, \alpha^2\left(\frac{\gamma_2^- - \gamma_1^+}{\gamma_2^- - \gamma_2^+}\right)^2\right).$$

Démonstration. D'après le Lemme 1.5 et la remarque 1.4 :

$$\gamma_2^{r_n}\gamma_1^{s_n}(v) = \gamma_2^{r_n}\left(\gamma_1^+, \alpha^2(\gamma_1^{s_n})'(\gamma_1^+)^{-1}\right) = \left(\gamma_2^{r_n}(\gamma_1^+), \alpha^2 e^{s_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)}(\gamma_2^{r_n})'(\gamma_1^+)^{-1}\right).$$

Comme le point γ_1^+ est différent de γ_2^-, le point $\gamma_2^{r_n}(\gamma_1^+)$ tend vers γ_2^+ lorsque n tend vers $+\infty$. D'après l'hypothèse sur le point γ_2^+, pour n suffisamment grand, $\gamma_2^{r_n}(\gamma_1^+)$ est différent du point ∞. On peut appliquer la Remarque 1.4 et le Lemme 1.6:

$$\left(\gamma_2^{r_n}(\gamma_2^-) - \gamma_2^{r_n}(\gamma_1^+)\right)^2 = (\gamma_2^{r_n})'(\gamma_2^-)(\gamma_2^{r_n})'(\gamma_1^+)\left(\gamma_2^- - \gamma_1^+\right)^2$$

$$\text{Donc } \gamma_2^{r_n}\gamma_1^{s_n}(v) = \left(\gamma_2^{r_n}(\gamma_1^+), \alpha^2\left(\frac{\gamma_2^- - \gamma_1^+}{\gamma_2^- - \gamma_2^{r_n}(\gamma_1^+)}\right)^2 e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_2)+s_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat. □

Remarque 2.2. Il existe toujours deux suites $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.

En effet, posons $\lambda_i = e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_i)}$, $i = 1, 2$. Si le nombre $\dfrac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_2|} = \dfrac{p}{q}$ est rationnel ($p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$), alors $\left|\lambda_1^q\lambda_2^{-p}\right| = e^{q\ln|\lambda_1| - p\ln|\lambda_2|} = 1$ donc il existe une suite d'entiers $(d_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\lambda_1^{qd_n}\lambda_2^{-pd_n} = 1$. On pose alors $r_n = qd_n$ et $s_n = -pd_n$ pour tout n. Si $\dfrac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_2|}$ est irrationnel, il existe une suite non stationnaire d'éléments du groupe multiplicatif engendré par λ_1 et λ_2 qui converge vers 1. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\ln|\lambda_1^n|}{\ln|\lambda_2|} = n\dfrac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_2|}$ est irrationnel donc il existe des entiers p_n et q_n tels que $\left|\lambda_1^{np_n}\lambda_2^{q_n} - 1\right| < \dfrac{1}{n}$. Quitte à inverser $\lambda_1^{np_n}\lambda_2^{q_n}$, on peut supposer que p_n est positif. Les suites $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ définies par $r_n = np_n$ et $s_n = q_n$ conviennent.

Lemme 2.3. *Soient Γ un groupe kleinien non élémentaire, γ une isométrie hyperbolique de Γ de point fixe attractif γ^+ et $v = (\gamma^+, \alpha^2)$ un vecteur de $\mathcal{V}_\Gamma$ dirigé vers γ^+. Alors pour toute isométrie hyperbolique γ_1 de Γ sans point fixe commun avec γ, les vecteurs $(\gamma^+, \alpha^2 e^{2l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)})$ et $(\gamma^+, \alpha^2 e^{-2l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)})$ appartiennent à $\overline{\Gamma v}$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que le point ∞ ne soit fixé par aucune isométrie hyperbolique de Γ. Les points γ_1^+ et $\gamma_1(\gamma^+)$ sont distincts donc il existe une suite $(g_n)_n$ d'isométries hyperboliques de Γ telle que la suite des points répulsifs (resp. attractifs) g_n^- (resp. g_n^+) converge vers le point γ_1^+ (resp. $\gamma_1(\gamma^+)$) (prop. 1.2 *(iv)*). Puisque ces deux points sont distincts des points fixes de γ, nous pouvons appliquer le lemme précédent à partir d'un certain rang:

$$\left(g_n^+, \alpha^2 \left(\frac{g_n^- - \gamma^+}{g_n^- - g_n^+}\right)^2\right) \in \overline{\Gamma v}$$

donc le vecteur

$$v' = \left(\gamma_1(\gamma^+), \alpha^2 \left(\frac{\gamma_1^+ - \gamma^+}{\gamma_1^+ - \gamma_1(\gamma^+)}\right)^2\right)$$

appartient à $\overline{\Gamma v}$. Les points γ_1^- et γ^+ sont distincts donc en appliquant le même raisonnement avec ces deux points, nous obtenons:

$$\left(\gamma^+, \alpha^2 \left(\frac{\gamma_1^+ - \gamma^+}{\gamma_1^+ - \gamma_1(\gamma^+)}\right)^2 \left(\frac{\gamma_1^- - \gamma_1(\gamma^+)}{\gamma_1^- - \gamma^+}\right)^2\right) \in \overline{\Gamma v'} \subseteq \overline{\Gamma v}$$

Ce vecteur est égal au vecteur $(\gamma^+, \alpha^2 e^{2l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)})$ d'après le Lemme 1.1. En échangeant les rôles de γ_1^+ et γ_1^-, nous obtenons le vecteur $(\gamma^+, \alpha^2 e^{-2l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)})$. Le cas général se traite en conjuguant le groupe Γ afin que le point ∞ ne soit pas un point fixe hyperbolique. $\square$

Démonstration du Théorème B'. Une implication est évidente. Pour démontrer la réciproque, nous utilisons ici la proposition D (démontrée dans la section 3). Soit $v = (\xi, \alpha^2)$ un vecteur de $\mathcal{V}_\Gamma$. Montrons d'abord (étape 1) que si $\xi = \gamma^+$ est le point fixe d'une isométrie hyperbolique du groupe Γ, alors l'ensemble $\overline{\Gamma v}$ est égal à $\mathcal{V}_\Gamma$. L'étape 2 consiste ensuite à montrer que si le point ξ est horosphérique, alors l'ensemble $\overline{\Gamma v}$ contient un vecteur dirigé vers le point fixe attractif d'une isométrie hyperbolique du groupe Γ. Il contient donc $\mathcal{V}_\Gamma$ d'après l'étape 1.

Etape 1. Nous pouvons supposer l'isométrie γ primitive dans le groupe Γ (c'est-à-dire que γ engendre le stabilisateur dans Γ du point γ^+). Dans ce cas, exceptées les puissances de γ, aucune isométrie hyperbolique de Γ n'a de point fixe en commun avec γ (voir [M] p19). En remarquant que :

$$\gamma^2(\gamma^+, \alpha^2) = (\gamma^+, \alpha^2 e^{2l_{\mathbb{C}}(\gamma)}) \text{ et } \gamma^{-2}(\gamma^+, \alpha^2) = (\gamma^+, \alpha^2 e^{-2l_{\mathbb{C}}(\gamma)})$$

et en utilisant le Lemme 2.3, nous obtenons que, pour tout élément β du groupe multiplicatif engendré par l'ensemble $\left\{e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)} : \gamma \in \Gamma_{\text{hyp}}\right\}$, le vecteur $(\gamma^+, \alpha^2\beta^2)$ appartient à $\overline{\Gamma v}$. D'après la proposition D, si le groupe Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe de $PGL(2, \mathbb{R})$, l'ensemble $\overline{\Gamma v}$ contient l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ dirigés vers γ^+. Considérons maintenant un vecteur quelconque (η, β^2) de $\mathcal{V}_\Gamma$ et montrons qu'il appartient à $\overline{\Gamma v}$. Le point η appartenant à l'ensemble limite L_Γ, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ d'isométries de Γ telle que la suite $(\gamma_n(\gamma^+))_n$ converge vers η. Cette suite étant choisie, il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de nombres complexes non nuls telle que la suite des nombres $\gamma_n'(\gamma^+)^{-1}\alpha_n$ converge vers β^2. Les vecteurs $\gamma_n(\gamma^+, \alpha_n)$ appartiennent à $\overline{\Gamma v}$ et ils tendent, lorsque n tend vers $+\infty$, vers le vecteur (η, β^2).

Etape 2. Le point ξ étant un point limite horosphérique, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ d'éléments de Γ telle que la suite $(||\gamma_n v||)_n$ converge vers 0 (propriété 1.3). Puisque $||\gamma_n v||^2 \geq |\alpha^2\gamma_n'(\xi)^{-1}|$, la suite $(\gamma_n'(\xi)^{-1})_n$ converge vers 0. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $(\gamma_n(\xi))_n$ converge dans $\hat{\mathbb{C}}$ vers un point η. Supposons tout d'abord que η soit différent de ∞. Soit γ une isométrie hyperbolique du groupe Γ ne fixant pas η et telle que ses points fixes γ^+ et γ^- soient différents du point ∞ (le groupe Γ n'est pas élémentaire). Soit $(r_n)_n$ la suite d'entiers relatifs vérifiant pour tout $n \geq 1$:

$$-(r_n + 1)l(\gamma) < \ln|\gamma_n'(\xi)^{-1}| \leq -r_n l(\gamma)$$

c'est-à-dire:

$$e^{-l(\gamma)} < |\gamma_n'(\xi)^{-1}e^{r_n l(\gamma)}| \leq 1.$$

En particulier cette suite tend vers $+\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, la suite $\left(\gamma_n'(\xi)^{-1}e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma)}\right)_n$ converge vers un nombre β vérifiant $e^{-l(\gamma)} \leq |\beta| \leq 1$. La suite de vecteurs:

$$\gamma^{r_n}\gamma_n(v) = (\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi), \alpha^2\gamma_n'(\xi)^{-1}(\gamma^{r_n})'(\gamma_n(\xi))^{-1})$$

converge vers un vecteur dirigé vers γ^+. En effet $\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi)$ converge vers γ^+ car $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(\xi) = \eta \neq \gamma^-$ et la suite $(\gamma^{r_n})_n$ converge uniformément vers γ^+ sur les compacts de $\hat{\mathbb{C}} - \{\gamma^-\}$ ([M] p22). Pour montrer la convergence de la seconde coordonnée, on utilise le Lemme 1.6 :

$$(\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi) - \gamma^{r_n}(\gamma^-))^2 = (\gamma^{r_n})'(\gamma_n(\xi))(\gamma^{r_n})'(\gamma^-)(\gamma_n(\xi) - \gamma^-)^2.$$

(Le point γ^- est distinct de ∞ et $\gamma^{-r_n}(\infty)$; $\gamma_n(\xi)$ tend vers $\eta \neq \infty$ et $\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi)$ tend vers $\gamma^+ \neq \infty$ donc, pour n assez grand, les hypothèses de ce lemme sont vérifiées.) Donc

$$\begin{aligned}\gamma_n'(\xi)^{-1}(\gamma^{r_n})'(\gamma_n(\xi))^{-1} &= \gamma_n'(\xi)^{-1}(\gamma^{r_n})'(\gamma^-)\frac{(\gamma_n(\xi) - \gamma^-)^2}{(\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi) - \gamma^-)^2} \\ &= \gamma_n'(\xi)^{-1}e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma)}\frac{(\gamma_n(\xi) - \gamma^-)^2}{(\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi) - \gamma^-)^2}\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\gamma^{r_n}\gamma_n(u) = \left(\gamma^+, \alpha^2\beta\frac{(\eta - \gamma^-)^2}{(\gamma^+ - \gamma^-)^2}\right).$$

Si le point η est égal à ∞, soient $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ tel que $g(\eta) \neq \infty$ et $\Gamma' = g\Gamma g^{-1}$ le groupe conjugué à Γ par g. Le vecteur $v' = g(v)$ appartient à $\mathcal{V}_{\Gamma'} = g(\mathcal{V}_\Gamma)$ et est dirigé vers le point $g(\xi)$ qui est horosphérique relativement à Γ'. Le raisonnement précédent montre que l'ensemble $\overline{\Gamma' v'} = g(\overline{\Gamma v})$ contient $\mathcal{V}_{\Gamma'}$ donc $\overline{\Gamma v} = \mathcal{V}_\Gamma$. □

3 Spectre complexe des groupes kleiniens

Nous démontrons maintenant la proposition D et le corollaire E. Les Lemmes 3.1 et 3.2 sont adaptés de [D1], [O] et [K].

Lemme 3.1. *Soient γ_1 et γ_2 deux isométries hyperboliques dont les points fixes (notés $\gamma_i^\pm$, $i = 1, 2$) sont deux à deux distincts, alors:*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n)+l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n)-l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n\gamma_2^n)} = \left[\gamma_1^-, \gamma_2^-, \gamma_2^+, \gamma_1^+\right]^2.$$

Démonstration. L'énoncé est invariant par conjugaison. La démonstration du lemme consiste à conjuguer simultanément les isométries γ_1 et γ_2 afin de pouvoir appliquer le lemme 1.6. Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, le groupe engendré par γ_1^n et γ_2^n est un groupe de Schottky donc libre et constitué uniquement d'isométries hyperboliques (voir [M]). Notons ξ_n le point fixe attractif de l'isométrie $\gamma_1^n\gamma_2^n$ pour $n \geq n_0$. L'ensemble

$$\{\gamma_1^-, \gamma_2^-\} \cup \{\xi_n : n \geq n_0\} \cup \{\gamma_2^n(\xi_n) : n \geq n_0\}$$

est dénombrable donc évite un point de $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une homographie envoyant ce point sur le point ∞. Donc, quitte à conjuguer γ_1 et γ_2 par cette homographie, nous pouvons supposer que l'ensemble précédent ne contient pas le point ∞. D'après la remarque 1.4:

$$e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n)+l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n)-l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n\gamma_2^n)} = (\gamma_1^n)'(\gamma_1^-)(\gamma_2^n)'(\gamma_2^-)(\gamma_1^n\gamma_2^n)'(\xi_n).$$

Pour tout n, chaque homographie est holomorphe au point considéré. En particulier:

$$(\gamma_1^n\gamma_2^n)'(\xi_n) = (\gamma_1^n)'(\gamma_2^n(\xi_n))(\gamma_2^n)'(\xi_n).$$

En appliquant le lemme 1.6, on obtient:

$$\begin{aligned} &e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n)+l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n)-l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n\gamma_2^n)} = \\ &\quad = \left(\frac{(\gamma_1^n)(\gamma_1^-) - (\gamma_1^n)(\gamma_2^n(\xi_n))}{\gamma_1^- - \gamma_2^n(\xi_n)}\right)^2 \left(\frac{(\gamma_2^n)(\gamma_2^-) - (\gamma_2^n)(\xi_n)}{\gamma_2^- - \xi_n}\right)^2 \\ &e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n)+l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n)-l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n\gamma_2^n)} = \left[\xi_n, \gamma_2^n(\xi_n), \gamma_2^-, \gamma_1^-\right]^2 \end{aligned}$$

La suite $(\xi_n)_n$ tend vers le point γ_1^+ et la suite $(\gamma_2^n(\xi_n))_n$ tend vers γ_2^+ car la suite de fonctions $(\gamma_2^n)_n$ tend uniformément vers γ_2^+ sur les compacts de $\hat{\mathbb{C}} - \{\gamma_2^-\}$. On obtient le résultat par continuité du birapport. $\square$

Pour un groupe kleinien Γ, considérons l'ensemble:

$$D_{\mathbb{C}}(\Gamma) = \left\{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_2) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_1\gamma_2) : \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{\text{hyp}} \text{ tels que } \gamma_1\gamma_2 \in \Gamma_{\text{hyp}}\right\}.$$

C'est un sous-ensemble du sous-groupe de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ engendré par les longueurs complexes des éléments hyperboliques de Γ.

Lemme 3.2. *Soient Γ un groupe kleinien non élémentaire et $L_\Gamma \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ son ensemble limite. Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ quatre points de L_Γ deux à deux distincts, alors:*

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^2 \in \overline{e^{D_{\mathbb{C}}(\Gamma)}}.$$

(L'adhérence est ici l'adhérence dans $\hat{\mathbb{C}}$.)

Démonstration. Les points ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 étant deux à deux distincts, il existe deux suites $(\gamma_{1,n})_n$ et $(\gamma_{2,n})_n$ d'isométries hyperboliques de Γ telles que:

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_{1,n}^- = \xi_1, \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_{1,n}^+ = \xi_4, \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_{2,n}^- = \xi_2, \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_{2,n}^+ = \xi_3.$$

D'après le lemme précédent:

$$\left[\gamma_{1,n}^-, \gamma_{2,n}^-, \gamma_{2,n}^+, \gamma_{1,n}^+\right]^2 = \lim_{k\to+\infty} e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n}^k)+l_{\mathbb{C}}(\gamma_{2,n}^k)-l_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n}^k\gamma_{2,n}^k)}.$$

A partir d'un certain rang, les isométries $\gamma_{1,n}$ et $\gamma_{2,n}$ n'ont pas de point fixe en commun donc il existe un entier n_0 et une suite d'entiers $(k_0(n))_{n\geq n_0}$ tels que, pour tous $n \geq n_0$ et $k \geq k_0(n)$ l'isométrie $\gamma_{1,n}^k\gamma_{2,n}^k$ soit hyperbolique, en particulier:

$$l_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n}^k) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_{2,n}^k) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n}^k\gamma_{2,n}^k) \in D_{\mathbb{C}}(\Gamma).$$

On obtient donc, en faisant tendre k vers $+\infty$,

$$\left[\gamma_{1,n}^-, \gamma_{2,n}^-, \gamma_{2,n}^+, \gamma_{1,n}^+\right]^2 \in \overline{e^{D_{\mathbb{C}}(\Gamma)}} \text{ pour tout } n \geq n_0$$

puis

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^2 \in \overline{e^{D_{\mathbb{C}}(\Gamma)}}$$

en passant à la limite en n. □

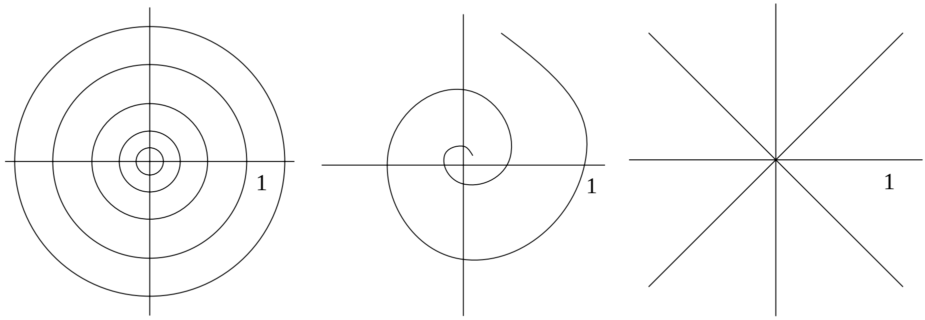
Démonstration de la Proposition D. Le sous-groupe S_Γ (qui est le plus petit sous-groupe fermé de $\mathbb{C}^*$ contenant l'ensemble $\{e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)} : \gamma \in \Gamma_{\text{hyp}}\}$) est un sous-groupe de Lie réel de $\mathbb{C}^*$. Il faut montrer que si $\dim \mathrm{S}_\Gamma < 2$ alors S_Γ est égal à $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

Supposons que S_Γ soit discret dans $\mathbb{C}^*$. Soient γ une isométrie hyperbolique du groupe Γ et ξ un point de l'ensemble limite L_Γ distinct de $\gamma^\pm$. Le Lemme 3.2 assure que le nombre $\left[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)\right]^2$ appartient au sous-ensemble $\overline{e^{D_{\mathbb{C}}(\Gamma)}}$ de $\overline{\mathrm{S}_\Gamma}$ pour tout $n \geq 1$. Comme le point $\gamma^n(\xi)$ tend vers γ^+ lorsque n tend vers $+\infty$, le birapport $\left[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)\right]$ tend vers 1 donc par discrétude $\left[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)\right]^2$ est constant et égal à 1 à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

Supposons que S_Γ soit un sous-groupe de dimension 1. La composante connexe S_Γ° contenant 1 est un sous-groupe à un paramètre de $\mathbb{C}^*$ de la forme:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{S}_\Gamma^\circ \ : \ t \longmapsto e^{\omega t}$$

avec ω un nombre complexe n'appartenant pas à $2i\pi\mathbb{Z}$. Selon le nombre ω et les autres composantes connexes de S_Γ, les cas suivants se présentent:



(A) $\mathrm{Re}w = 0$ (B) $\mathrm{Re}w \neq 0$, $\mathrm{Im}w \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ (C) $\mathrm{Re}w \neq 0$, $\mathrm{Im}w \in 2i\pi\mathbb{Z}$

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois points de l'ensemble limite L_Γ, deux à deux distincts. Considérons l'homographie h suivante:

$$h \ : \ \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \ : \ \eta \longmapsto [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta]$$

La notation h^2 désignera l'application $\eta \mapsto (h(\eta))^2$ (avec $\infty^2 = \infty$). C'est un difféomorphisme local en tout point de $\hat{\mathbb{C}} - \{\xi_1, \xi_2\}$. D'après le lemme 3.2, $h^2(\eta)$ appartient à $\overline{\mathrm{S}_\Gamma}$ pour tout point η de $L_\Gamma - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

Montrons que les cas A et B sont impossibles. Supposons que S_Γ soit un tel sous-groupe. Comme $h^2(\xi_3) = 1$, il existe un voisinage connexe U de ξ_3 tel que $h^2(U \cap L_\Gamma)$ soit inclus dans un voisinage de 1 dans S_Γ. Au voisinage de ξ_3 l'ensemble limite L_Γ est donc inclus dans une sous-variété de dimension 1 (car h^2 est un difféomorphisme local en ξ_3): il existe un ouvert connexe U' et une sous-variété M contenant tous les deux ξ_3 tels que

$$U' \cap L_\Gamma \subseteq U' \cap M.$$

Par densité de $\Gamma(\xi_1)$ dans L_Γ, il existe une isométrie γ dans le groupe Γ telle que $\gamma(\xi_1)$ appartienne à U'. L'application γ est un difféomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ et préserve L_Γ donc il existe un voisinage V de ξ_1 envoyé dans U' et vérifiant:

$$V \cap L_\Gamma \subseteq V \cap N$$

où N désigne la sous-variété $\gamma^{-1}(M)$. Le point ξ_1 sépare $N \cap V$ en deux composantes connexes (quitte à restreindre V). Soit N^+ une de ces deux composantes telle que ξ_1 soit la limite d'une suite $(\eta_n)_n$ de points appartenant à $N^+ \cap L_\Gamma$. L'application h étant un difféomorphisme, $h(N)$ est une sous-variété contenant 0 donc quitte à restreindre V, $h^2(N^+)$ est une sous-variété dont un bord est l'origine 0 et les points $h^2(\eta_n)$ appartiennent à $S_\Gamma \cap h^2(N^+)$. Si S_Γ est du type A ou B, on peut choisir n_0 suffisament grand de façon que S_Γ et $h^2(N^+)$ soient deux sous-variétés transverses en $h^2(\eta_{n_0})$. Il existe alors un voisinage V' de $h^2(\eta_{n_0})$ tel que

$$V' \cap S_\Gamma \cap h^2(N^+) = \{h^2(\eta_{n_0})\}$$

et quitte à restreindre ce voisinage, on peut supposer que h^2 possède un inverse local de V' sur W. Soit η' un point de $W \cap L_\Gamma$, alors η' appartient à N^+ donc $h^2(\eta')$ appartient à

$$h^2(W \cap L_\Gamma \cap N^+) = h^2(W) \cap h^2(L_\Gamma) \cap h^2(N^+) \subseteq V' \cap S_\Gamma \cap h^2(N^+).$$

Donc $\eta' = \eta_{n_0}$ ce qui est impossible car η_{n_0} n'est pas isolé dans L_Γ.

Il reste à montrer que, dans le cas C, le groupe S_Γ est égal à $\mathbb{R}_+^*$ ou à $\mathbb{R}^*$ et que le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Comme $h(\xi_3) = 1$, il existe un voisinage U de ξ_3 dans $\hat{\mathbb{C}}$ vérifiant

$$h(U) \cap S_\Gamma \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Puisque $h^2(L_\Gamma - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\})$ est inclus dans $\overline{S_\Gamma}$, $h^2(U \cap L_\Gamma)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit qu'au voisinage de ξ_3, l'ensemble limite L_Γ est contenu dans la sous-variété $h^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Considérons une isométrie hyperbolique γ de Γ fixant $\gamma^\pm$ et ξ un point de l'ensemble limite L_Γ distinct de $\gamma^\pm$. Appliquons le raisonnement précédent avec $\xi_1 = \gamma^-$, $\xi_2 = \xi$ et $\xi_3 = \gamma^+$: il existe un voisinage de γ^+ dans L_Γ envoyé sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par h. Donc il existe un rang n_0 tel que le birapport $[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)]$ appartienne à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ pour tout $n \geq n_0$. En composant avec l'homographie $z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$ qui préserve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on obtient

$$[\gamma^-, \gamma^+, \xi, \gamma^n(\xi)] \in \mathbb{R}^* \text{ pour tout } n \geq n_0,$$

c'est-à-dire

$$e^{nl_{\mathbb{C}}(\gamma)} \in \mathbb{R}^* \text{ pour tout } n \geq n_0$$

d'après le Lemme 1.1. On en déduit que $e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)}$ appartient à $\mathbb{R}^*$ donc que le groupe S_Γ est $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$. Il ne reste plus qu'à montrer que le groupe Γ est conjugué dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Puisque $h^2(\eta)$ appartient à S_Γ pour tout point η de $L_\Gamma - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ et les points ξ_1, ξ_2 et ξ_3 sont envoyés par h respectivement sur 0, 1 et ∞, l'ensemble limite L_Γ est envoyé par h dans la réunion $\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Donc en remplaçant le groupe Γ par son conjugué $h\Gamma h^{-1}$, on obtient:

$$L_\Gamma \subseteq \mathbb{R}\cup i\mathbb{R}\cup\{\infty\}.$$

Le cercle $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ et (éventuellement) le cercle $i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ sont les seuls cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ contenant une infinité de points de l'ensemble limite L_Γ donc tout élément γ de Γ préserve globalement $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ou échange ces deux cercles. Dans le premier cas, l'homographie γ appartient à $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$. Dans le second cas, γ fixe ou échange les points d'intersection 0 et ∞. Elle ne peut pas les échanger (sinon elle fixerait un point de la géodésique qui les relie) donc cette homographie est représentée par une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Comme λ^2 (ou λ^{-2}) est égal à $e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)}$ qui est un nombre réel, l'homographie γ appartient à $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$.

Lorsque S_Γ est le groupe $\mathbb{R}_+^*$, le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ d'après le théorème suivant ([M] p108). $\square$

Théorème 3.3. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire tel que $\mathrm{tr}^2(\gamma) > 0$ pour toute isométrie γ de Γ, alors Γ est conjugué dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ à un groupe fuchsien.*

Nous utilisons maintenant la Proposition D pour démontrer le Corollaire E.

Démonstration du Corollaire E. Notons $[v]$ la classe dans $S^3/\{\pm\mathrm{Id}\}$ d'un vecteur v de $\mathcal{V}$. L'image réciproque par π de chaque point de $S^3/\{\pm\mathrm{Id}\}$ est une orbite pour l'action par multiplication du groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Le sous-ensemble $\pi^{-1}(L_\Gamma)$ de $S^3/\{\pm\mathrm{Id}\}$ est invariant par Γ et compact. D'après le lemme de Zorn, il contient un ensemble minimal M. Les actions des groupes $\mathbb{U}$ et Γ commutent donc, pour tout nombre complexe $e^{i\theta}$ dans $\mathbb{U}$, l'ensemble $e^{i\theta}M$ est un ensemble minimal. Les ensembles M et $e^{i\theta}M$ sont donc égaux ou disjoints. Le sous-groupe T de $\mathbb{U}$ défini par $T = \left\{e^{i\theta} \in \mathbb{U} \mid e^{i\theta}M = M\right\}$ décrit donc la fibre de $\pi_{|M}$:

$$\pi_{|M}^{-1}(\pi([v])) = T[v] \quad \text{pour tout } [v] \text{ dans } M.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathbb{U}$. Par minimalité de L_Γ, la projection de M par π est L_Γ. Il suffit donc de montrer que le groupe T contient l'ensemble $\left\{e^{i\theta(\gamma)} | \gamma \in \Gamma_{\mathrm{hyp}}\right\}$ puisque le groupe engendré par cet ensemble est dense dans $\mathbb{U}$ d'après la proposition D. Soit γ une isométrie hyperbolique du groupe Γ de point fixe attractif γ^+, puisque $\pi(M) = L_\Gamma$, il existe un vecteur v tel que $[v]$

appartienne à M et $\pi([v])$ soit égal à γ^+. Le vecteur v s'écrit (γ^+, α^2) avec α un nombre complexe non nul. Or

$$M \ni \gamma[v] = [\gamma v] = [\gamma(\gamma^+, \alpha^2)] = [(\gamma^+, \alpha^2 e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)})] = [e^{i\theta(\gamma)} v] = e^{i\theta(\gamma)}[v].$$

L'ensemble $e^{i\theta(\gamma)}$M est minimal. Les deux ensembles minimaux M et $e^{i\theta(\gamma)}$M n'étant pas disjoints, ils sont égaux donc $e^{i\theta(\gamma)}$ appartient au groupe T. $\square$

Bibliographie

[B] Beardon, A.F. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, 1983.

[BM] Beardon, A.F. and Maskit, B. *Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra*. Acta Math. **132** (1974), 1–12.

[Bou] Bourdon, M. *Stucture conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*. L'enseignement Mathématique. **41** (1995), 63–102.

[Bow] Bowditch, B.H. *Geometrical finiteness with variable negative curvature*. Duke Math. J. **77** (1995), no. 1, 229–274.

[Br] Brin, M. *Ergodic theory of frame flows*. Ergodic theory and dynamical systems, II (College Park, Md., 1979/1980), pp. 163–183, Progr. Math., 21, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.

[CG] Conze, J.-P. and Guivarc'h, Y. *Limit sets of groups of linear transformations*. Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999). Sankhyā Ser. A **62** (2000), no. 3, 367–385.

[D1] Dal'Bo, F. *Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **30** (1999), no. 2, 199–221.

[D2] Dal'Bo, F. *Topologie du feuilletage fortement stable*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 981–993.

[G] Greenberg, L. *Discrete groups with dense orbits*. In Auslander, L.; Green, L. and Hahn, F. Flows on homogeneous spaces. Annals of Mathematics Studies, No. 53 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[K] Kim, I. *Marked length spectrum on the finite set of elements determines the irreducible representation in the isometry group of rank one symmetric space of noncompact type*. The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996), 99–107, Monogr. Geom. Topology, 25, Internat. Press, Cambridge, MA, 1998.

[LP] Ledrappier, F. and Pollicott, M. *Ergodic properties of linear actions of* 2×2 *matrices*. Prépublication de l'Ecole Polytechnique (2001).

[M] Maskit, B. *Kleinian groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[O] Otal, J.-P. *Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative*. Rev. Mat. Iberoamericana **8** (1992), no. 3, 441–456.

[S] Starkov, A.N. *Fuchsian groups from the dynamical viewpoint*. J. Dynam. Control Systems **1** (1995), no. 3, 427–445.

[W] Waterman, P.L. *Möbius transformations in several dimensions*. Adv. Math. **101** (1993), no. 1, 87–113.

Damien Ferte
IRMAR – Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex
FRANCE

E-mail: damien.ferte@univ-rennes1.fr